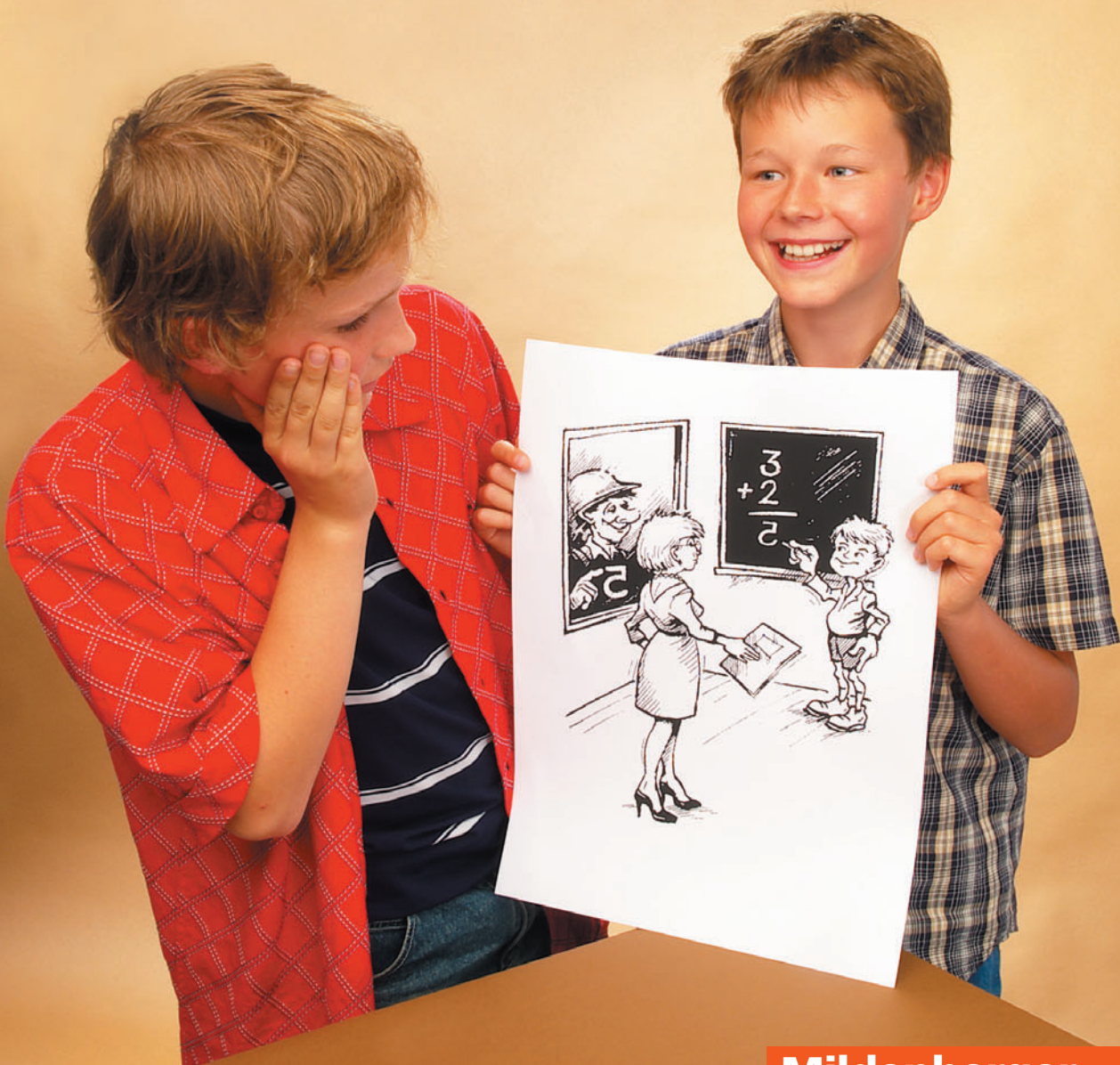


# Pisa-Training

Mathematische Denkaufgaben  
Lösungen



Mildenberger

# Pisa-Training

Mathematische Denkaufgaben  
für Schülerinnen und Schüler  
der 5. Jahrgangsstufe

## Lösungsheft

bearbeitet von  
Hermann-Dietrich Hornschuh

illustriert von  
Elisabeth Lottermoser

**Mildenberger Verlag**

**Dank gebührt meiner Frau Brynhild  
sowie Gerhard Hergenröder  
und Jochen Kreusch.**

**Bestell-Nr. 150-211 · ISBN 978-3-619-15211-7**

© 2004 Mildenerger Verlag GmbH, 77652 Offenburg  
Internetadresse: [www.mildenerger-verlag.de](http://www.mildenerger-verlag.de)  
E-Mail: [info@mildenerger-verlag.de](mailto:info@mildenerger-verlag.de)

Auflage	5	4	3	2
Jahr	2012	2011	2010	2009

**Bezugsmöglichkeiten**

Alle Titel des Mildenerger Verlags erhalten Sie unter: [www.mildenerger-verlag.de](http://www.mildenerger-verlag.de) oder im Buchhandel. Jede Buchhandlung kann alle Titel direkt über den Mildenerger Verlag beziehen. Ausnahmen kann es bei Titeln mit Lösungen geben: Hinweise hierzu finden Sie in unserem aktuellen Gesamtprogramm.

*Das Werk und seine Teile sind urheberrechtlich geschützt. Jede Nutzung in anderen als den gesetzlich zugelassenen Fällen bedarf der vorherigen schriftlichen Einwilligung des Verlages. Hinweis zu § 52 a UrhG: Weder das Werk noch seine Teile dürfen ohne eine solche Einwilligung eingescannt und in ein Netzwerk eingestellt werden. Dies gilt auch für Intranets von Schulen und sonstigen Bildungseinrichtungen.*

**Druck: Furtwängler GmbH & Co. KG, 79211 Denzlingen**  
**Gedruckt auf umweltfreundlichen Papieren**

## Lösungen 1

### Lösung 1.1

Der kleine Wurm kroch in 12 Nächten jeweils 4 Meter nach oben, das waren 48 Meter. An 11 Tagen rutschte er jeweils 2 Meter nach unten, das waren 22 Meter.

Die Differenz

48 Meter – 22 Meter = 26 Meter

gibt die gesuchte Höhe an.

**Antwortsatz:** Die Linde ist 26 Meter hoch.

### Lösung 1.2

Der „Trick“ bei der Lösung dieser Aufgabe besteht darin, dass man vom Ergebnis ausgeht und alle Rechenvorgänge „umgekehrt“ ausführt.

1. Rechnung (Addition):  $7 + 15 = 22$
2. Rechnung (Division):  $22 : 11 = 2$
3. Rechnung (Multiplikation):  $2 \cdot 100 = 200$
4. Rechnung (Subtraktion):  $200 - 107 = 93$

**Antwortsatz:** Die gesuchte Zahl ist 93.

### Lösung 1.3

1. Vers:

Anzahl der Fische = Einfache Anzahl der Tische + 1.

2. Vers:

Anzahl der Fische = Doppelte Anzahl der Tische – 2.

Nur wenn die Anzahl der Tische 3 ist, ergibt sich für die Anzahl der Fische jeweils 4.

**Antwortsatz:** Es sind 4 Fische und 3 Tische.

### Lösung 2.1

Die Anzahl der Kinder sei  $x$ .

Ansatz:

$$x = \frac{x}{6} + 11 + 7 + 20 + 17$$

$$x - \frac{x}{6} = 55; \frac{5}{6}x = 55$$

Ergebnis:

$$x = 66$$

**Antwortsatz:** Der Dorfschullehrer hatte damals 66 Kinder in seiner Klasse.

### Lösung 2.2

Das Alter von Opa Schlauberger in Jahren sei  $x$ .

Ansatz:

$$x = 50 + \frac{x}{3}$$

$$x - \frac{x}{3} = 50; \frac{2}{3}x = 50$$

Ergebnis:

$$x = 75$$

**Antwortsatz:** Opa Schlauberger ist 75 Jahre alt.

### Lösung 2.3

Die Anzahl der Jahre sei  $x$ .

Ansatz:

$$x = \frac{x}{6} + \frac{x}{4} + \frac{x}{2} + 5$$

$$x - \frac{11}{12}x = 5; \frac{1}{12}x = 5$$

Ergebnis:

$$x = 60$$

**Antwortsatz:** Der Bürgermeister war zu diesem Zeitpunkt 60 Jahre alt.

## Lösungen 3

### Lösung 3.1

Annahme  $C = 1$ .

Reihe I:

Aus  $A + 5B + 3C = 24$  folgt  $A + 5B = 21$ .

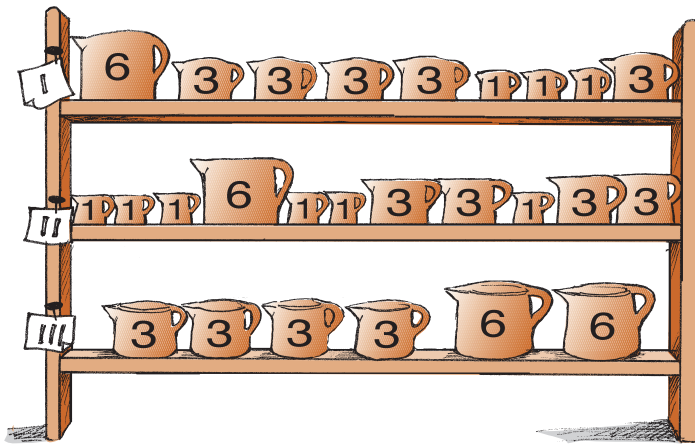
Reihe II:

Aus  $A + 4B + 6C = 24$  folgt  $A + 4B = 18$ .

Reihe III:

Aus  $2A + 4B = 24$  folgt  $A + 2B = 12$ .

Ziehen wir das Ergebnis aus Reihe II vom Ergebnis aus Reihe I ab, erhalten wir  $B = 3$  und daraus, unter Verwendung des Ergebnisses aus Reihe III,  $A = 6$ .



**Antwortsatz:** Ein großer Topf fasst 6 Liter, ein mittlerer 3 Liter und ein kleiner 1 Liter.

### Lösung 3.2

1. Acht 20-Rubel-Scheine und ein 50-Rubel-Schein sind 210 Rubel.
2. Sieben 20-Rubel-Scheine und zwei 50-Rubel-Scheine sind 240 Rubel.
3. Sechs 20 Rubel-Scheine und drei 50-Rubel-Scheine sind 270 Rubel.
4. Fünf 20-Rubel-Scheine und vier 50-Rubel-Scheine sind 300 Rubel.
5. Vier 20-Rubel-Scheine und fünf 50-Rubel-Scheine sind 330 Rubel.

**Antwortsatz:** Iwan bezahlt mit fünf 20-Rubel-Scheinen und vier 50-Rubel-Scheinen.

### Lösung 3.3

Wenn Harold eine Strecke der Länge  $x$  mitfährt, dann fährt John eine Strecke der Länge  $2x$  mit. Für eine Länge der Strecke  $3x$  werden 3 Dollar bezahlt.

**Antwortsatz:** Harold muss an John genau einen Dollar bezahlen.

### Lösung 4.1

Höhe des „Pfennigturms“

= 420 000 000 000 000 Millimeter = 420 000 000 000 Meter

= 420 000 000 Kilometer

Strecke der „Sonnenentfernung“

= 150 000 000 Kilometer

Rechnung:  $420\,000\,000 : 150\,000\,000 = 2,8$

**Antwortsatz:** Der „Pfennigturm“ würde 420 000 000 Kilometer hoch sein und somit 2,8-mal von der Erde bis zur Sonne reichen.

### Lösung 4.2

1 200 000 000 000 Münzen

200 Münzen werden in 1 Minute gezählt.

Zeit = 6 000 000 000 Minuten = 100 000 000 Stunden = 10 000 000 Tage

Rechnung:  $10\,000\,000 \text{ Tage} : 250 \text{ Tage/Jahr} = 40\,000 \text{ Jahre}$

**Antwortsatz:** Um das Geld zu zählen, werden 40 000 Jahre benötigt.

### Lösung 4.3

1 200 000 000 000 Münzen

1 Münze wiegt 5 Gramm.

Gewicht = 6 000 000 000 000 Gramm = 6 000 000 000 Kilogramm

= 6 000 000 Tonnen

Rechnung:  $6\,000\,000 \text{ Tonnen} : 20 \text{ Tonnen/Wagen} = 300\,000 \text{ Wagen}$

**Antwortsatz:** Um das Geld zu transportieren, werden 300 000 Wagen benötigt.

## Lösungen 5

### Lösung 5.1

Hendrik rechnet:	$27 + 72 = 99$
Kim rechnet:	$71 + 17 = 88$
Kevin rechnet:	$99 \cdot 88 = 8\,712$
Marcel schreibt:	8 642
Ugur rechnet:	$8\,712 - 8\,642 = 70$

**Antwortsatz:** Ugur hat 70 als Ergebnis erhalten.

### Lösung 5.2

Sarah rechnet:	$32 \cdot 64 = 2\,048$
Beatrice rechnet:	$49 \cdot 87 = 4\,263$
Franziska rechnet:	$4\,263 - 2\,048 = 2\,215$
Vera rechnet:	$2 + 2 + 1 + 5 = 10$
Maren rechnet:	$2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5 = 20$
Amelie rechnet:	$20 : 10 = 2$

**Antwortsatz:** Amelie hat 2 als Ergebnis erhalten.

### Lösung 5.3

Pascal rechnet:	$888 - 111 = 777$
Peter rechnet:	$11\,111 - 8\,888 = 2\,223$
Daniela rechnet:	$777 + 2\,223 = 3\,000$
Elena rechnet:	$3\,000 : 1\,000 = 3$

**Antwortsatz:** Elena hat 3 als Ergebnis erhalten.



### Lösung 6.1

Dreiecke, die mit dem Eckpunkt A beginnen:

ABC, ABI, ACD, ADF, ADG, AFG, AFH

Dreiecke, die mit dem Eckpunkt B beginnen:

BCE, BCI, BEF

Dreiecke, die mit dem Eckpunkt C beginnen:

CDG, CEH, CIE

Dreiecke, die mit den Eckpunkten D, E, F beginnen:

DEF, EHI, FGH

**Antwortsatz:** In dieser Figur sind 16 Dreiecke enthalten.

### Lösung 6.2

Dreiecke, die mit dem Eckpunkt A beginnen:

ABE, ACF, ACG, AEF, AGF

Dreiecke, die mit dem Eckpunkt B beginnen:

BCD, BCH, BCI, BDE, BIH

Dreiecke, die mit dem Eckpunkt C beginnen:

CDF, CDI

Dreiecke, die mit dem Eckpunkt D beginnen:

DFI

Dreiecke, die mit dem Eckpunkt E beginnen:

EFG, EFH, EGH

**Antwortsatz:** In dieser Figur sind 16 Dreiecke enthalten.

### Lösung 6.3

Diese Figur enthält die drei Vierecke CDGB, CEFB und DEFG.

**Antwortsatz:** Die Flächeninhalte der beiden kleinen Vierecke CDGB und DEFG ist so groß wie der Flächeninhalt des großen Vierecks CEFB.

## Lösungen 7

### Lösung 7.1

Es nehmen die Zahlen 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31 und 32 am Hindernislauf teil.

Nach der 1. Hürde sind noch folgende Zahlen im Rennen:  
13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29 und 31.

Nach der 2. Hürde sind noch folgende Zahlen im Rennen:  
13, 17, 19, 23, 25, 29 und 31.

Nach der 3. Hürde sind noch folgende Zahlen im Rennen:  
23, 25 und 29.

Nach der 4. Hürde sind noch folgende Zahlen im Rennen:  
23 und 29.

**Antwortsatz:** Nur die Zahlen 23 und 29 erreichen das Ziel.

### Lösung 7.2

Es nehmen die Zahlen 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28 und 29 am Torlauf teil.

Nach dem 1. Tor sind noch folgende Zahlen im Rennen:  
10, 11, 13, 14, 16, 17, 19, 20, 22, 23, 25, 26, 28 und 29.

Nach dem 2. Tor sind noch folgende Zahlen im Rennen:  
11, 13, 14, 16, 17, 19, 22, 23, 26, 28 und 29.

Nach dem 3. Tor sind noch folgende Zahlen im Rennen:  
11, 13, 17, 19, 23 und 29.

Diese Zahlen haben die Querprodukte 1, 3, 7, 9, 6 und 18.

**Antwortsatz:** Nur die Zahl 29 erreicht „beim Riesenslalom“ das Ziel.

### Lösung 7.3

An der Qualifikation nehmen folgende Zahlen teil:  
22, 25, 28, 31, 34, 37, 40, 43, 46 und 49.

Nicht zu kurze Sprungski haben folgende Zahlen:  
22, 25, 31, 34, 37, 40, 43, 46 und 49.

Nicht zu lange Sprungski haben folgende Zahlen:  
22, 25, 31, 34 und 37.

Diese Zahlen haben die Quersummen 4, 7, 4, 7 und 10.

**Antwortsatz:** Nur die Zahl 37 ist „beim Skispringen“ qualifiziert.

### Lösung 8.1

Zur Anzahl der Mitglieder, die im Hallenbad schwimmen, wird die Anzahl der Mitglieder, die im Freibad schwimmen, addiert. Von dieser Summe wird die Anzahl der Vereinsmitglieder subtrahiert.

Das Ergebnis ergibt die Anzahl der Mitglieder, die im Hallenbad und im Freibad schwimmen.

Rechnung:  $55 \text{ Mitglieder} + 77 \text{ Mitglieder} - 111 \text{ Mitglieder} = 21 \text{ Mitglieder}$

**Antwortsatz:** 21 Mitglieder schwimmen im Hallenbad und im Freibad.

**Probe:**

34 Mitglieder schwimmen nur im Hallenbad, 56 Mitglieder nur im Freibad und 21 Mitglieder im Hallenbad und im Freibad.

### Lösung 8.2

Rechnung:  $24 \text{ Jungen} + 12 \text{ Jungen} - 31 \text{ Jungen} = 5 \text{ Jungen}$

**Antwortsatz:** 5 Jungen sehen im Fernsehen Fußballspiele und Skispringen an.

**Probe:**

19 Jungen sehen nur Fußballspiele, 7 Jungen nur Skispringen und 5 Jungen Fußballspiele und Skispringen im Fernsehen an.

### Lösung 8.3

Rechnung:  $27 \text{ Mädchen} + 26 \text{ Mädchen} - 43 \text{ Mädchen} = 10 \text{ Mädchen}$

**Antwortsatz:** 10 Mädchen singen im Chor und spielen im Orchester.

**Probe:**

17 Mädchen singen nur im Chor, 17 Mädchen spielen nur im Orchester und 10 Mädchen singen im Chor und spielen im Orchester.

## Lösungen 9

### Lösung 9.1

1. Rechnung:  $6 \text{ Tonnen} \cdot 15 = 90 \text{ Tonnen}$
2. Rechnung:  $200 \text{ Tonnen} - 90 \text{ Tonnen} = 110 \text{ Tonnen}$
3. Rechnung:  $110 \text{ Tonnen} : 11 \text{ Tonnen/Fahrt} = 10 \text{ Fahrten}$

Ergebnis:

$$15 \text{ Fahrten} + 10 \text{ Fahrten} = 25 \text{ Fahrten}$$

**Antwortsatz:** Um den Sand abzutransportieren sind insgesamt 25 Fahrten notwendig.

### Lösung 9.2

1. Rechnung:  
 $800 \text{ Tonnen} : 20 \text{ Tonnen/Waggon} = 40 \text{ Waggon}$   
Für 800 Tonnen braucht man 40 Waggon mit dem geringeren Ladegewicht von 20 Tonnen.
2. Rechnung:  
 $4\,000 \text{ Tonnen} : 25 \text{ Tonnen/Waggon} = 160 \text{ Waggon}$   
Für 4 000 Tonnen braucht man 160 Waggon mit dem höheren Ladegewicht von 25 Tonnen.
3. Rechnung:  
 $40 \text{ Waggon} + 160 \text{ Waggon} = 200 \text{ Waggon}$

**Antwortsatz:** Es werden 200 Waggon gebraucht.

### Lösung 9.3

1. Rechnung:  
 $600 \text{ Kisten} : 200 \text{ Kisten/Flugzeug} = 3 \text{ Flugzeuge}$   
Um 600 Kisten zu transportieren, werden 3 kleine Flugzeuge benötigt.
2. Rechnung:  
 $2\,700 \text{ Kisten} : 300 \text{ Kisten/Flugzeug} = 9 \text{ Flugzeuge}$   
Um 2 700 Kisten zu transportieren, werden 9 mittlere Flugzeuge benötigt.
3. Rechnung:  
 $10\,000 \text{ Kisten} : 400 \text{ Kisten/Flugzeug} = 25 \text{ Flugzeuge}$   
Um 10 000 Kisten zu transportieren, werden 25 große Flugzeuge benötigt.
4. Rechnung:  
 $3 \text{ Flugzeuge} + 9 \text{ Flugzeuge} + 25 \text{ Flugzeuge} = 37 \text{ Flugzeuge}$

**Antwortsatz:** Es sind 37 Flugzeuge erforderlich.

### Lösung 10.1

Am Schluss hatten alle drei Spieler gleich viel Geld, nämlich jeder 8 Taler. Vorher hatte Eulenspiegel 4 Taler, der Bauer 4 Taler und der Wirt 16 Taler. Davor hatte Eulenspiegel 2 Taler, der Bauer 8 Taler und der Wirt 14 Taler. Am Anfang hatte Eulenspiegel 4 Taler, der Bauer 7 Taler und der Wirt 13 Taler.

**Antwortsatz:** Eulenspiegel hatte 4 Taler und der Bauer 1 Taler gewonnen.  
Der Wirt hatte 5 Taler verloren.

### Lösung 10.2

Würden in jeder Klasse so viele Kinder wie in Klasse 5a sein, dann wären in Klasse 5d ein Kind und in Klasse 5b drei Kinder mehr. Insgesamt sind das dann vier Kinder in den Klassen 5a und 5c weniger:

1. Rechnung:

$$104 \text{ Kinder} - 4 \text{ Kinder} = 100 \text{ Kinder}$$

2. Rechnung:

$$100 \text{ Kinder} : 4 = 25 \text{ Kinder}$$

Somit sind in den Klassen 5a und 5c jeweils 25 Kinder.

In Klasse 5d ist ein Kind mehr, also sind dort 26 Kinder.

In Klasse 5b sind 3 Kinder mehr, also sind dort 28 Kinder.

**Antwortsatz:** In Klasse 5a sind 25 Kinder, in Klasse 5b sind 28 Kinder,  
in Klasse 5c sind 25 Kinder und in Klasse 5d sind 26 Kinder.

### Lösung 10.3

Der ältere Bruder besaß

$$1 \text{ 600 Goldstücke} - 1 \text{ 000 Goldstücke} = 600 \text{ Goldstücke}$$

mehr als der jüngere Bruder.

Der ältere Bruder gab monatlich

$$25 \text{ Goldstücke} - 10 \text{ Goldstücke} = 15 \text{ Goldstücke}$$

mehr aus als der jüngere Bruder.

Die gesuchte Zeitspanne ergibt sich aus

$$600 \text{ Goldstücke} : 15 \text{ Goldstücke/Monat} = 40 \text{ Monate.}$$

**Antwortsatz:** Nach 40 Monaten besaßen beide Brüder noch jeweils 600 Goldstücke.

Die Ergebnisse, die deutsche Schülerinnen und Schüler im PISA-Vergleich erzielten, haben gezeigt, dass in Mathematik **das sinnentnehmende Lesen** von Texten und geeignete **Problemlösungsstrategien** nicht genügend beherrscht werden.

Wer einmal Gelegenheit hatte, schulmathematische Aufgaben aus anderen Ländern mit unseren zu vergleichen, wird über das dort verlangte Niveau sehr erstaunt sein. Dabei geht es nicht nur um europäische Staaten wie Belgien, Finnland oder Rumänien, sondern auch um ferne Länder wie die Mongolei, Botswana oder die Philippinen – nur um einige zu nennen.

Die vorliegende Sammlung „Pisa-Training“ enthält in drei Heften mathematische **Denkaufgaben**, mit denen genau diese Aufgabenbereiche geübt werden können.

Die meisten Aufgaben unterscheiden sich deshalb deutlich von den aus den Schulbüchern bekannten. Im Vordergrund stehen die für die Problemlösung notwendigen „Denkschritte“. Die eigentliche „Rechenaufgabe“ ist dann einfach zu lösen.

Im Bereich der 4. Grundschulklasse gehen die zur Lösung erforderlichen Grundlagen nicht über die vier Grundrechenarten hinaus. Für die Klassen 5 und 6 werden auch Kenntnisse elementarer Gleichungen benötigt. Alle Aufgaben sind **altersgemäß** und inhaltlich **lehrplankonform**.

Jedes Aufgabenheft enthält 33 Trainingseinheiten mit 99 Denkaufgaben in 3 Schwierigkeitsstufen. Die erste Schwierigkeitsstufe jeder Trainingseinheit dient der **Einführung** in die Problemlösungsstrategie, die zweite der **Übung und Wiederholung** und die dritte der **Vertiefung**.

Zu den Aufgabenheften gibt es jeweils ein separates **Lösungsheft**, in dem zu jeder Aufgabe die notwendigen „Denkschritte“ und die eigentliche „Rechenaufgabe“ erklärt werden.

