Pisa-Training 6

Mathematische Denkaufgaben

Lösungen

Mildenberger

Pisa-Training

Mathematische Denkaufgaben
für Schülerinnen und Schüler
der 6. Jahrgangsstufe

Lösungsheft

bearbeitet von
Hermann-Dietrich Hornschuh

illustriert von
Elisabeth Lottermoser

Mildenberger Verlag

**Dank gebührt meiner Frau Brynhild
sowie Gerhard Hergenröder
und Jochen Kreusch.**

Bestell-Nr. 150-221 · ISBN 3-619-15221-7

Internetadresse: www.mildenberger-verlag.de
E-Mail: info@mildenberger-verlag.de

Auflage	Druck	4	3	2	1
Jahr		2008	2007	2006	2005

Druck: VVA GmbH / Wesel Kommunikation, 76534 Baden-Baden
Gedruckt auf umweltfreundlichem Papier

Lösungen 1

Lösung 1.1

Die Summe der Winkel in einem Dreieck beträgt $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

Zwischen diesen Winkeln bestehen die Beziehungen
$\alpha = \beta - 10°$ und $\gamma = \beta + 10°$.

Berechnung des Winkels β:
$\beta - 10° + \beta + \beta + 10° = 180°$
$3\beta = 180°$
$\beta = 60°$

Berechnung des Winkels α:
$\alpha = 60° - 10° = 50°$

Berechnung des Winkels γ:
$\gamma = 60° + 10° = 70°$

Antwortsatz: Die Winkel α, β und γ betragen 50°, 60° und 70°.

Lösung 1.2

Die Summe der Winkel in einem Dreieck beträgt $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

Zwischen diesen Winkeln bestehen die Beziehungen
$\alpha = 2\beta$ und $\gamma = 3\beta$.

Berechnung des Winkels β:
$2\beta + \beta + 3\beta = 180°$
$6\beta = 180°$
$\beta = 30°$

Berechnung des Winkels α:
$\alpha = 2 \cdot 30° = 60°$

Berechnung des Winkels γ:
$\gamma = 3 \cdot 30° = 90°$

Antwortsatz: Die Winkel α, β und γ betragen 60°, 30° und 90°.

Lösung 1.3

Die Summe der Winkel in einem Dreieck beträgt $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

Zwischen diesen Winkeln bestehen die Beziehungen
$\alpha = \beta - 3°$ und $\gamma = \beta + 33°$.

Berechnung des Winkels β:
$\beta - 3° + \beta + \beta + 33° = 180°$
$3\beta = 180° - 33° + 3° = 150°$
$\beta = 50°$

Berechnung des Winkels α:
$\alpha = 50° - 3° = 47°$

Berechnung des Winkels γ:
$\gamma = 50° + 33° = 83°$

Antwortsatz: Die Winkel α, β und γ betragen 47°, 50° und 83°.

Lösungen 2

Lösung 2.1

Die 8 Fische wurden in 24 gleiche Teile zerlegt. Jeder bekam davon 8 Teile.

Die 5 Fische von Franz ergaben 15 Teile, von denen der Fremde 7 Teile erhielt.

Die 3 Fische von Fritz ergaben 9 Teile, von denen der Fremde 1 Teil erhielt.

Der Fremde hatte von Franz siebenmal mehr Fisch erhalten als von Fritz. Deshalb muss Franz auch von dem Geld siebenmal mehr bekommen als Fritz.

Antwortsatz: Franz gehörten von dem Geld 7 Taler und Fritz 1 Taler.

Lösung 2.2

Aus dem Text der Aufgabe ist bekannt, dass Eulenspiegel 100 Pfund wiegt. Aus den beiden letzten Angaben folgt, dass 1 Schaf und 2 Ziegen zusammen 100 Pfund wiegen. Aus den beiden mittleren Angaben folgt, dass 16 Ziegen und 100 Pfund so schwer sind wie 5 Schafe und 10 Ziegen, also 500 Pfund. Daher wiegen 4 Ziegen 100 Pfund und 1 Schaf 50 Pfund.

Antwortsatz: Zwei Schafe haben das gleiche Gewicht wie Eulenspiegel.

Lösung 2.3

Die Anzahl der seit Anfang des Tages vergangenen Minuten sei x.
Aus dem Ansatz

$$x + 3 \cdot \frac{2}{9} \cdot x = 1\,440$$

folgt das Ergebnis
$x = 864$.
Die vergangenen 864 Minuten sind 14 Stunden und 24 Minuten.

Antwortsatz: Es war 14.24 Uhr, als Eulenspiegel nach der Zeit gefragt wurde.

Lösung 3.1

Alle Hunde sind zusammen 14 Jahre oder 168 Monate alt.
Das Alter des Boxers in Monaten sei x.

Aus der Beziehung
Alter des Boxers + Alter des Dackels + Alter des Pudels + Alter des Spitzes + Alter des Terriers = 168
folgt der Ansatz
$x + 3(x + 1) + 4(x - 1) + (4x - 3) + (2x + 4) = 168$

mit dem Ergebnis
$x = 12$.

Antwortsatz: Der Boxer ist 12 Monate, der Dackel 39 Monate, der Pudel 44 Monate, der Spitz 45 Monate und der Terrier 28 Monate alt.

Lösung 3.2

Das Alter von Alissa in Jahren sei x.

Aus dem Ansatz
$24 - x = x - 12$

folgt das Ergebnis.
$x = 18$

Antwortsatz: Alissa ist 18 Jahre alt.

Lösung 3.3

Das Alter der jüngsten Frau in Jahren sei x.

Aus dem Ansatz
$7x = 140$

folgt das Ergebnis
$x = 20$.

Antwortsatz: Die Frau ist 40 Jahre alt.

Lösungen 4

Lösung 4.1

Die Strecke in Kilometern, die Herr Zahl jeden Tag bis zur Schule zurücklegen muss, wird mit x bezeichnet. Die Strecke in Kilometern, die Frau Ziffer jeden Tag bis zur Schule zurücklegen muss, wird mit y bezeichnet.

Der Ansatz
$x + y = 62$
$x - y = 12$

führt nach Addition zum Ergebnis
$2x = 74$ und $x = 37$.

Subtraktion ergibt
$y = 62 - x = 62 - 37 = 25$.

Antwortsatz: Herr Zahl wohnt 37 Kilometer von seiner Schule und Frau Ziffer 25 Kilometer von ihrer Schule entfernt.

Lösung 4.2

Die Nummer des Hauses, in dem die Eltern von Herrn Zahl wohnen, sei x. Die Nummer des Hauses, in dem die Eltern von Frau Ziffer wohnen, sei y.

Der Ansatz
$x + y = 48$
$x - y = 14$

führt nach Addition zum Ergebnis
$2x = 62$ und $x = 31$.

Subtraktion ergibt
$y = 48 - x = 48 - 31 = 17$.

Antwortsatz: Die Eltern von Herrn Zahl wohnen in dem Haus mit der Nummer 31 und die Eltern von Frau Ziffer wohnen in dem Haus mit der Nummer 17.

Lösung 4.3

Die Anzahl der Schüler, die von Herrn Zahl im Fach Mathematik die Note 1 erhalten haben, sei x.

Die Anzahl der Schülerinnen, die von Frau Ziffer im Fach Mathematik die Note 1 erhalten haben, sei y.

Der Ansatz
$x + y = 23$
$x - y = \ \ 1$

führt nach Addition zum Ergebnis
$2x = 24$ und $x = 12$.

Subtraktion ergibt
$y = 23 - x = 23 - 12 = 11$.

Antwortsatz: Herr Zahl hat 12 Schülern und Frau Ziffer 11 Schülerinnen im Fach Mathematik die Note 1 erteilt.

Lösungen 5

Lösung 5.1

Die Behauptung von Lukas war falsch. Also waren es vom Standort aus noch 5 Kilometer oder mehr bis zur Hütte.

Auch die Behauptung von Elias war falsch. Demnach müssten es bis zur Hütte noch 5 Kilometer oder weniger gewesen sein.

Waren beide Aussagen falsch, so können es vom Standort aus bis zur Hütte nur 5 Kilometer gewesen sein.

Antwortsatz: Vom Standort aus mussten die drei Jungen noch genau 5 Kilometer bis zur Hütte laufen.

Lösung 5.2

Die Behauptung von Mona war richtig. Auch die Behauptung von Kitty war richtig. Waren beide Aussagen richtig, dann kann vom Standort aus der Fluss nur 30 Minuten entfernt gewesen sein.

Antwortsatz: Vom Standort aus mussten die drei Mädchen noch genau 30 Minuten joggen, um den Fluss zu erreichen.

Lösung 5.3

Da Herr Lehmann eine wahre Aussage gemacht hat, stimmt weder die Aussage von Herrn Meier noch die Aussage von Herrn Schulze. Also ist die Entfernung weder länger als 10 Kilometer noch kürzer als 10 Kilometer.

Antwortsatz: Die drei Väter müssen noch genau 10 Kilometer bis zum Gipfel laufen.

Lösung 6.1

Mathematisch könnte diese Aufgabe beispielsweise auch so formuliert werden:

„Zerlege die Zahl 48 so in 9 Summanden, dass jeder folgende Summand um 0,5 größer als der vorhergehende Summand ist.“

Wenn wir den ersten Summanden mit n bezeichnen, dann ist der

zweite Summand	$n + 0{,}5$,
dritte Summand	$n + 1$,
vierte Summand	$n + 1{,}5$,
fünfte Summand	$n + 2$,
sechste Summand	$n + 2{,}5$,
siebte Summand	$n + 3$,
achte Summand	$n + 3{,}5$,
neunte Summand	$n + 4$.

Die Summe aller neun Summanden ist dann
$9n + 18 = 48$ und $9n = 30$.

Daraus folgt
$n = 3\frac{1}{3}$.

Antwortsatz: Die Pakete wiegen $3\frac{1}{3}$ Kilogramm, $3\frac{5}{6}$ Kilogramm, $4\frac{1}{3}$ Kilogramm, $4\frac{5}{6}$ Kilogramm, $5\frac{1}{3}$ Kilogramm, $5\frac{5}{6}$ Kilogramm, $6\frac{1}{3}$ Kilogramm, $6\frac{5}{6}$ Kilogramm und $7\frac{1}{3}$ Kilogramm.

Lösung 6.2

Der erste Summand sei n, dann ist der

zweite Summand	$n + \frac{1}{3}$,
dritte Summand	$n + \frac{2}{3}$,
vierte Summand	$n + 1$,
fünfte Summand	$n + 1\frac{1}{3}$,
sechste Summand	$n + 1\frac{2}{3}$,
siebte Summand	$n + 2$.

Lösungen 6

Die Summe aller sieben Summanden ist dann

$n + n + \frac{1}{3} + n + \frac{2}{3} + n + 1 + n + 1\frac{1}{3} + n + 1\frac{2}{3} + n + 2 = 56$

$7n + 7 = 56$

$7n = 49$

$n = 7$

Antwortsatz: Die gesuchten Summanden heißen 7, $7\frac{1}{3}$, $7\frac{2}{3}$, 8, $8\frac{1}{3}$, $8\frac{2}{3}$ und 9.
Ihre Summe beträgt genau 56.

Lösung 6.3

Der erste Summand sei n, dann ist der

zweite Summand	$n - \frac{2}{3}$,
dritte Summand	$n - 1\frac{1}{3}$,
vierte Summand	$n - 2$,
fünfte Summand	$n - 2\frac{2}{3}$,
sechste Summand	$n - 3\frac{1}{3}$.

Die Summe aller sechs Summanden ist dann

$n + n - \frac{2}{3} + n - 1\frac{1}{3} + n - 2 + n - 2\frac{2}{3} + n - 3\frac{1}{3} = 65$

$6n - 10 = 65$

$6n = 75$

$n = 12,5$

Antwortsatz: Die gesuchten Summanden heißen $12\frac{1}{2}$, $11\frac{5}{6}$, $11\frac{1}{6}$, $10\frac{1}{2}$, $9\frac{5}{6}$ und $9\frac{1}{6}$.
Ihre Summe beträgt genau 65.

Lösung 7.1

Eine Kugel kann 25 verschiedene Stellungen einnehmen. Kommt eine zweite Kugel hinzu, bleiben für diese noch 24 mögliche Stellungen. Zwei unterschiedliche Kugeln können also 25 · 24 = 600 verschiedene Stellungen einnehmen.

Da es sich aber um zwei gleiche Kugeln handelt, können diese
600 : (1 · 2) = 300
verschiedene Stellungen einnehmen.

Antwortsatz: Zwei gleiche Kugeln können auf diesem Brett 300 verschiedene Stellungen einnehmen. Also hat Natalies Vater 100 zu wenig und Natalies Mutter 100 zu viel geschätzt.

Lösung 7.2

Bei drei unterschiedlichen Figuren kann die erste Figur 25, die zweite Figur 24 und die dritte Figur 23 verschiedene Stellungen einnehmen. Zusammen sind das 25 · 24 · 23 = 13 800 verschiedene Stellungen.

Da es sich aber um drei gleiche Figuren handelt, können diese
13 800 : (1 · 2 · 3) = 2 300
verschiedene Stellungen einnehmen.

Antwortsatz: Drei gleiche Figuren können auf diesem Brett 2 300 verschiedene Stellungen einnehmen.

Lösung 7.3

Bei drei unterschiedlichen Figuren kann die erste Figur 36, die zweite Figur 35 und die dritte Figur 34 verschiedene Stellungen einnehmen. Zusammen sind das 36 · 35 · 34 = 42 840 verschiedene Stellungen.

Da es sich aber um drei gleiche Figuren handelt, können diese
42 840 : (1 · 2 · 3) = 7 140
verschiedene Stellungen einnehmen.

Antwortsatz: Drei gleiche Figuren können auf diesem Brett 7 140 verschiedene Stellungen einnehmen.

Lösungen 8

Lösung 8.1

Nimmt man das Ergebnis mit den Kehrbrüchen mal, erhält man die gesuchte Anzahl.

1. Rechnung: $30 \cdot \frac{4}{3} = 40$

2. Rechnung: $40 \cdot \frac{5}{4} = 50$

Antwortsatz: Martin hat 50 Äpfel gepflückt.

Probe: $50 \cdot \frac{4}{5} = 40$; $40 \cdot \frac{3}{4} = 30$

Lösung 8.2

Nimmt man das Ergebnis mit den Kehrbrüchen mal, erhält man die gesuchte Zahl.

1. Rechnung: $112 \cdot \frac{6}{7} = 96$

2. Rechnung: $96 \cdot \frac{3}{2} = 144$

Antwortsatz: Igor hat sich die Zahl 144 gemerkt.

Probe: $144 \cdot \frac{2}{3} = 96$; $96 \cdot \frac{7}{6} = 112$

Lösung 8.3

Nimmt man das Ergebnis mit den Kehrbrüchen mal, erhält man die gesuchte Zahl.

1. Rechnung: $200 \cdot \frac{4}{5} = 160$

2. Rechnung: $160 \cdot \frac{3}{4} = 120$

Antwortsatz: Hannah hat sich die Zahl 120 gemerkt.

Probe: $120 \cdot \frac{4}{3} = 160$; $160 \cdot \frac{5}{4} = 200$

Lösung 9.1

Die Lösung dieser Aufgabe wird dadurch verständlich, dass der Vater von Fridolin zwei Brüder hat. Also ist der Bruder von Fridolins Onkel der Onkel von Fridolins Bruder. Ottokar hat nicht Recht.

Antwortsatz: Mit der gesuchten Person kann jeder der beiden Brüder von Fridolins Vater gemeint sein.

Lösung 9.2

Der Mann ist der Großvater. Dessen Vater ist der Urgroßvater. Dessen Enkel ist der Sohn dieses Mannes. Dessen Sohn ist der Enkel dieses Mannes. Somit ist der Enkel seines Vaters der Vater seines Enkels.

Antwortsatz: Ja, die Aussage des Mannes ist wahr.

Lösung 9.3

Die Frau hat sich mit ihrer Schwester über ihre gemeinsame Tante unterhalten.

Antwortsatz: Ja, die Aussage der Frau ist wahr.

Lösungen 10

Lösung 10.1

Aus der Hunderterstelle folgt:
Für das Mädchen muss die Zahl 2 eingesetzt werden.

Aus der Zehnerstelle folgt:
Für den Jungen muss die Zahl 1 eingesetzt werden.

Aus der Einerstelle folgt:
Für den Hund muss die Zahl 4 eingesetzt werden.

Antwortsatz: Die Rechnung 421 + 214 = 635 ist richtig.

Lösung 10.2

Aus der Zehnerstelle folgt:
Für den Jungen muss die Zahl 1 eingesetzt werden.

Aus der Einerstelle folgt:
Für den Hund muss die Zahl 5 eingesetzt werden.

Aus der Hunderterstelle folgt:
Für das Mädchen muss die Zahl 3 eingesetzt werden.

Antwortsatz: Die Rechnung 511 + 345 = 856 ist richtig.

Lösung 10.3

Aus der Einerstelle folgt:
Für den Jungen muss die Zahl 7 eingesetzt werden.

Aus der Zehnerstelle folgt:
Für den Hund muss die Zahl 2 eingesetzt werden.

Aus der Hunderterstelle folgt:
Für das Mädchen muss die Zahl 1 eingesetzt werden.

Antwortsatz: Die Rechnung 127 + 271 = 398 ist richtig.

Die Ergebnisse, die deutsche Schülerinnen und Schüler im PISA-Vergleich erzielten, haben gezeigt, dass in Mathematik **das sinnentnehmende Lesen** von Texten und geeignete **Problemlösungsstrategien** nicht genügend beherrscht werden.

Wer einmal Gelegenheit hatte, schulmathematische Aufgaben aus anderen Ländern mit unseren zu vergleichen, wird über das dort verlangte Niveau sehr erstaunt sein. Dabei geht es nicht nur um europäische Staaten wie Belgien, Finnland oder Rumänien, sondern auch um ferne Länder wie die Mongolei, Botswana oder die Philippinen – nur um einige zu nennen.

Die vorliegende Sammlung „Pisa-Training" enthält in drei Heften mathematische **Denkaufgaben**, mit denen genau diese Aufgabenbereiche geübt werden können.

Die meisten Aufgaben unterscheiden sich deshalb deutlich von den aus den Schulbüchern bekannten. Im Vordergrund stehen die für die Problemlösung notwendigen „Denkschritte". Die eigentliche „Rechenaufgabe" ist dann einfach zu lösen.

Im Bereich der 4. Grundschulklasse gehen die zur Lösung erforderlichen Grundlagen nicht über die vier Grundrechenarten hinaus. Für die Klassen 5 und 6 werden auch Kenntnisse elementarer Gleichungen benötigt. Alle Aufgaben sind **altersgemäß** und inhaltlich **lehrplankonform**.

Jedes Aufgabenheft enthält 33 Trainingseinheiten mit 99 Denkaufgaben in 3 Schwierigkeitsstufen. Die erste Schwierigkeitsstufe jeder Trainingseinheit dient der **Einführung** in die Problemlösungsstrategie, die zweite der **Übung und Wiederholung** und die dritte der **Vertiefung**.

Zu den Aufgabenheften gibt es jeweils ein separates **Lösungsheft**, in dem zu jeder Aufgabe die notwendigen „Denkschritte" und die eigentliche „Rechenaufgabe" erklärt werden.

Bestell-Nr. 150-221 · ISBN 3-619-15221-7